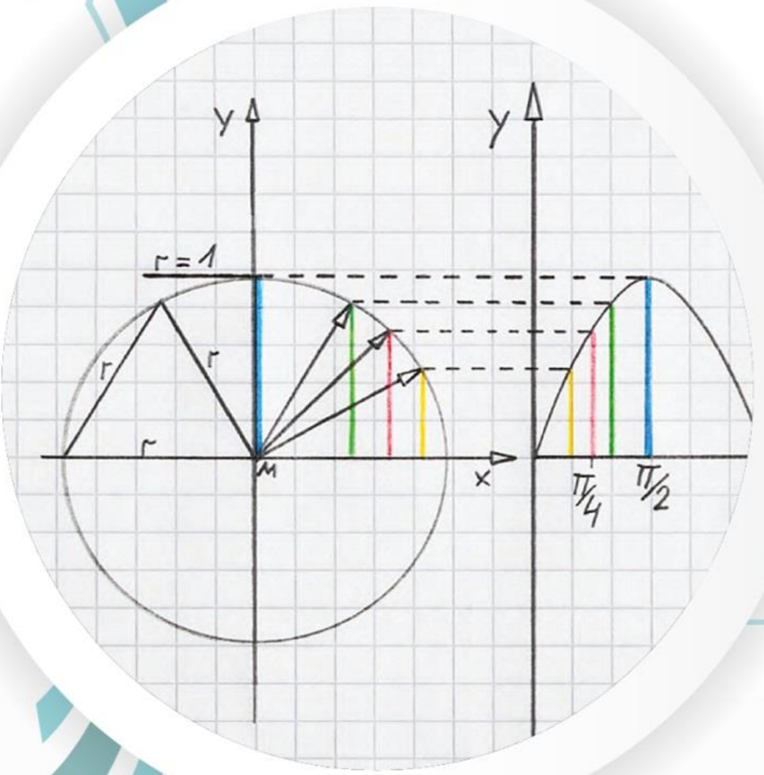
ISSN : 1687-6156 (ONLINE)

INTERNATIONAL JOURNAL OF

ENGINEERING MATHEMATICS: THEORY AND APPLICATION



Indexed by:
ROAD
Crossref
Universal Impact Factor
IMPACT FACTOR SEARCH

Editorial Team

CONTACT
Professor of Computational Engineering Mathematics and Numerical Analysis
Faculty of Engineering
Zagazig University
Zagazig
P. O. 44519
Egypt
http://iejemta.com/
Email: sgamil@zu.edu.eg

The first Darboux problem for second order nonlinear hyperbolic equations with memory.

Yangiboev Z.Sh. Bektosheva U.
Karshi State University, Uzbekistan.
2.TUIT Karshi branch, Uzbekistan.

Abstract: The first Darboux problem for the second order hyperbolic integro-differential equations with power nonlinearity has been investigated. The existence of global solutions to this problem is studied, depending on the sign of the parameter before the nonlinear term and the degree of nonlinearity is considered.

Keywords: Darboux problem, hyperbolic equation, solvability, poroelasticity, generalized solution, Volterra equation, Green-Hadamard function, correctness, integral equation.

О ПЕРВОЙ ЗАДАЧЕ ДАРБУ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА К ПАМЯТЬЮ

[1]Янгибоев З.Ш., [2]Бектошева У.
1. Каршинский госуниверситет,Узбекистон.
2.ТУИТ Каршинский филиал, Узбекистон.

Аннотация- исследуется первая задача Дарбу для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка со степенной нелинейностью. Рассматривается вопрос о существовании глобальных решений этой задачи и зависимости от знака параметра перед нелинейным членом и степени эго нелинейности.

Ключевые слова- задача Дарбу, гиперболическое уравнение, о разрешимость, пороупругости, обобщенная решения, уравнению Вольтерра, функция Грина-Адамара, корректность, интегральное уравнение.

1 Постановка задачи

В плоскости x и t рассмотрим линейное гиперболическое уравнение к памятью вида

$$L_\nu u := u_{tt} - u_{xx} + b_1(x,t)u_t + b_2(x,t)u_x + b_3(x,t)u + \nu|u|^\beta u + \\ + \int_0^t b(x,s)u(x,s)ds = f(x,t) \tag{1}$$

Здесь u искомая действительная функция, $b_k(x,t)(k=1,2,3), b(x,t), f(x,t)$- заданные функции β и ν- заданные действительные постоянные, причем $\beta\nu \neq 0, \beta > 1$. Уравнение (1) возникает в частности в динамической теорию пороупругости [1-7].

Следуя $[8]$ введем обозначая $D_T := \{(x,t): 0 < x < t, 0 < t < T\}, T \leq \infty$, треугольную область, ограниченную характеристическим отрезком $\Gamma_{1,T} : x = t, 0 \leq t \leq T$, а также отрезками $\Gamma_{2,T} : x = 0, 0 \leq t \leq T$, и $\Gamma_{3,T} : t = T, 0 \leq x \leq T$. Для уравнения (1) рассмотрим первую задачу Дарбу об определении в области

D_T решения $u(x,t)$ этого интегро-дифференциального уравнения по краевым условиям (см., например, [9, с. 228]):

$$u\big|_{\Gamma_{i,T}} = 0,\ i = 1,2. \tag{2}$$

Отметим, что для нелинейных уравнений гиперболического типа вопросам существования или отсутствия глобальных решений различных задач (как, например, начальных, смешанных, различного рода нелокальных задач, в том числе периодических) посвящено много работ (см., например, [10]-[19]). В линейном случае, т.е. при $\beta\nu = 0, b(x,t) = 0$ задача (1),(2), как известно, корректно поставлена и имеет место глобальную разрешимость в соответствующих пространствах функций (см., например, [9], [20]-[23]).

В [8] показано, что при определенных условиях на показатель нелинейности β и параметр ν задача (1), (2) для случая $b(x,t) = 0$ в одних случаях глобально разрешима, а в других случаях не имеет глобального решения, при этом рассматриваемая задача локально разрешима.

В данной работе исследуется первая задача Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка к памятью. Обсуждается также вопрос о разрешимости поставленной задачи.

Определение 1 [8] . Пусть $b_k(x,t), b(x,t) \in C(\bar{D}_T), k = 1,2,3, f(x,t) \in C(\bar{D}_T)$.

Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением* задачи (1) (2) класса C в области D_T, если $u \in C(\bar{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\bar{D}_T, S_T)$, что $u_n \to u$ и $L_\nu u_n \to f$ в пространстве $C(\bar{D}_T)$ $n \to \infty$, при $n \to \infty$,
где

$$\overset{\circ}{C}{}^2(\bar{D}_T, S_T) := \left\{u \in C^2(\bar{D}_T) : u\big|_T = 0\right\}, S_T =: \Gamma_{1,T} \cup \Gamma_{2,T}.$$

Определение 2 [8]. Пусть $b_k, b \in C(\bar{D}_\infty), k = 1,2,3, f \in C(\bar{D}_\infty)$. Мы будем говорить, что задача (1),(2) глобально разрешима в классе C, если для любого конечного $T > 0$ эта задача имеет сильное обобщенное решение класса C в области D_T.

2 Априорная оценка решения задачи (1), (2)

Имеет место

Лемма 1. Пусть $-1 < \beta < 0$ а в случае $\beta > 0$ дополнительно потребуем, чтобы $\nu > 0$. Тогда для сильного обобщенного решения задачи (1), (2) из класса $C(\bar{D}_T)$ справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C(\bar{D}_T)} \le c_1 \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + c_2 \tag{3}$$

с положительными постоянными $c_k(T, b_j, b, \beta, \nu), k = 1,2, j = 1,2,3,$ не зависящими от u и f.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\beta > 0$ и $\nu > 0$. Пусть сильное обобщенное решение задачи (1), (2) класса C в области D_T. Тогда в силу определения 1 существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}^{2}(\bar{D}_T, S_T)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \lim_{n\to\infty}\|L_\nu u_n - f\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \tag{4}$$

а следовательно, и

$$\lim_{n\to\infty}\left\||u_n|^\beta u_n - |u_n|^\beta u\right\|_{C(\bar{D}_T)} = 0. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $u_n \in \overset{\circ}{C}^{2}(\bar{D}_T, S_T)$, как решение следующей задачи:

$$L_\nu u_n = f_n \tag{6}$$

$$u_n\big|_{S_T} = 0. \tag{7}$$

Умножая обе части равенства (6) на $\dfrac{\partial u_n}{\partial t}$ и интегрируя по области $D_T := \{(x,t) \in D_T : 0 < t < \tau\}, 0 < \tau \le T$, будем иметь

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt - \int\limits_{D_T}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt + \frac{\nu}{\beta+2}\int\limits_{D_T}\frac{\partial}{\partial t}|u_n|^{\beta+2}dxdt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau}\left(f_n - b_1\frac{\partial u_n}{\partial t} - b_2\frac{\partial u_n}{\partial x} - b_3 u_n - \int\limits_0^t b(x,s)u_n(x,s)ds\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt.$$

Обозначим $I_\tau := D_\infty \cap \{t = \tau\}, 0 < \tau \le T$. Тогда с учетом (7) интегрированием по частям левой части последнего равенства получаем

$$\int\limits_{D_\tau}\left(f_n - b_1\frac{\partial u_n}{\partial t} - b_2\frac{\partial u_n}{\partial x} - b_3 u_n\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt =$$

$$= \int\limits_{\gamma_{1,\tau}}\frac{1}{2\eta_t}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\eta_t - \frac{\partial u_n}{\partial t}\eta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2(\eta_t^2 - \eta_x^2)\right]ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{I_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx + \frac{\nu}{\beta+2}\int\limits_{I_\tau}|u_n|^{\beta+2}dx, \tag{8}$$

где $\eta := (\eta_x, \eta_t)$-единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ и $\Gamma_\tau := \Gamma_T \cap \{t \le \tau\}$. Так как, что оператор $\eta_t\, \partial/\partial x - \eta_x\, \partial/\partial t$ является внутренним дифференциальным оператором на $\Gamma_{1,T}$ в силу (7) будем имеет

$$\eta_t\frac{\partial u_n}{\partial x} - \eta_x\frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{\Gamma_{1,\tau}} = 0 \tag{9}$$

Далее принимая во внимание, что

$$(\eta_t^2 - \eta_x^2)\big|_{\Gamma_{1,T}} = 0 \tag{10}$$

С учетом (9), (10) из (8) получаем

$$\omega_n(\tau):=\int_{I_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dx\le$$

$$\le 2\int_{D_\tau}\left(f_n-a_1\frac{\partial u_n}{\partial t}-a_2\frac{\partial u_n}{\partial x}-a_3u_n-\int_0^t b(x,s)u_n(x,s)ds\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt. \qquad (11)$$

Отсюда используя $e-$неравенство, получим

$$\omega_n(\tau)\le e\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+\frac{1}{e}\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}-$$

$$-2\int_{D_\tau}\left(a_1\frac{\partial u_n}{\partial t}+a_2\frac{\partial u_n}{\partial x}+a_3u_n+\int_0^t b(x,s)u_n(x,s)ds\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt. \qquad (12)$$

Вводя обозначение $B:=\max(\max\limits_{1\le k\le 3}\sup\limits_{(x,t)\in\bar{D}_T}|b_k(x,t)|,|b(x,t)|)$ в силу неравенства Коши имеем

$$-2\int_{D_\tau}\left(b_1\frac{\partial u_n}{\partial t}+b_2\frac{\partial u_n}{\partial x}+b_3u_n+\int_0^t b(x,s)u_n(x,s)ds\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt\le$$

$$\le B\left[4\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dxdt+2\int_{D_\tau}u_n{}^2dxdt\right]. \qquad (13)$$

Далее, из равенств (7) и $u_n(x,t)=\int_x^t\left(\partial u_n(x,\tau)/\partial t\right)d\tau,(x,t)\in\bar{D}_T$ после несложных преобразований получим[24]

$$\int_{D_\tau}u_n{}^2dxdt\le\tau^2\int_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt \qquad (14)$$

Отсюда с учетом (12) и (13) следует, что

$$\omega_n(\tau)\le(e+2B(\tau^2+2))\int_0^\tau\omega_n(y)dy+\frac{1}{e}\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)},\ 0<\tau\le T.$$

Отсюда учитывая, что величина $\|f_n\|_{L_2(D_\tau)}$, как функция от τ является неубывающей , в силу леммы Гроноулла (см., например, [25, с 13]) получим

$$\omega_n(\tau)\le\frac{1}{e}\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}\exp(\tau(e+2B(\tau^2+2))).$$

Положим $e=1/\tau$ и замечая, что

$$\inf_{e>0}\frac{\exp(\tau e)}{e}=e\tau,$$

имеем

$$\omega_n(\tau)\le\tau\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}\exp(2B\tau(\tau^2+2)+1),\ 0<\tau\le T. \qquad (15)$$

Если $(x,t)\in \bar{D}_T$, то в силу (7) имеет место равенство

$$u_n(x,t)=u_n(x,t)-u_n(0,t)=\int_0^x \frac{\partial u_n(y,t)}{\partial x}dy,$$

откуда в силу (15) будем имеет

$$|u_n(x,t)|^2 \le \int_0^x dy \int_0^x \left(\frac{\partial u_n(y,t)}{\partial x}\right)^2 dy \le x\int_{I_t}\left(\frac{\partial u_n(y,t)}{\partial x}\right)^2 dy \le xw_n(t)\le tw_n(t)\le$$

$$\le t^2\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}\exp(2Bt(t^2+2)+1)\le t^2\|f_n\|^2_{C(\bar{D}_t)}\mathrm{mesD}_t\exp(2Bt(t^2+2)+1)\le$$

$$\le 2^{-1}t^4\|f_n\|^2_{C(\bar{D}_t)}\exp(2Bt(t^2+2)+1),\ (x,t)\in\bar{D}_T. \qquad (16)$$

или

$$\|u_n\|_{C(\bar{D}_T)}\le\sqrt{2^{-1}T^2}\|f_n\|_{C(\bar{D}_T)}\exp(2BT(T^2+2)+1/2).$$

В силу (4), переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим

$$\|u_n\|_{C(\bar{D}_T)}\le\sqrt{2^{-1}T^2}\|f_n\|_{C(\bar{D}_T)}\exp(AT(T^2+2)+1/2). \qquad (17)$$

Из оценки (17) следует (3) в случае $\beta>0$ и $\nu>0$.

Теперь рассмотрим случай $-1<\beta<0$ при произвольном ν. В этом случае $1<\beta+2<2$ и применяя неравенство

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},\ a=|u_n|^{\beta+2},\ b=1,\ p=\frac{2}{\beta+2}>1,\ q=-\frac{2}{\beta}>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

получим

$$\int_{I_\tau}|u_n|^{\beta+2}dx\le\int_{I_\tau}\left[\frac{\beta+2}{2}|u_n|^2-\frac{\beta}{2}\right]dx=\frac{\beta+2}{2}\int_{I_\tau}|u_n|^2dx+\frac{|\beta|\tau}{2}.$$

Отсюда, учитывая вид функции $\omega_n(\tau)$ из (11) в силу (8)-(10) следует, что

$$\omega_n(\tau)\le|\nu|\int_{I_\tau}|u_n|^2dx+\frac{|\beta\nu|\tau}{\beta+2}+$$

$$+2\int_{D_\tau}\left(f_n-b_1\frac{\partial u_n}{\partial t}-b_2\frac{\partial u_n}{\partial x}-b_3u_n-\int_0^t b(x,s)u_n(x,s)ds\right)\frac{\partial u_n}{\partial t}dxdt. \qquad (18)$$

В соответствии с теорией следа имеет место оценка (см., например, [24, с 77,86])

$$\|u_n\|_{L_2(I_\tau)}\le\sqrt{\tau}\|u_n\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,\Gamma_\tau)} \qquad (19)$$

где $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,\Gamma_\tau):=\{u\in W_2^1(D_\tau):u_{\Gamma_\tau}=0\}, W_2^1(D_\tau)$ -пространство Соболева,

$$\|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D_\tau,\Gamma_\tau)}:=\int_{D_\tau}\left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right]dxdt.$$

Поскольку $2f_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)\le f_n^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2$, то в силу (13), (14) и (19) из (18) будем иметь

$$\omega_n(\tau)\le(2B(\tau^2+2)+|\nu|\tau+1)\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 dxdt+$$
$$+(B+|\nu|\tau)\int\limits_{D_\tau}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dxdt+\int\limits_{D_\tau} f_n^2 dxdt+\frac{|\beta\nu|\tau}{\beta+2}.$$

Отсюда следует, что

$$w_n(\tau)\le(2B(\tau^2+2)+|\nu|\tau+1)\int\limits_0^\tau w_n(y)dy+\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}+\frac{|\beta\nu|\tau}{\beta+2},\ 0<\tau\le T.$$

Применяя лемму Гронуолла (см., например, [25; с 13]) из последнего неравенства получим

$$w_n(\tau)\le\left[\|f_n\|^2_{L_2(D_\tau)}+\frac{|\beta\nu|T}{\beta+2}\right]\exp\left\{(2B(T^2+2)+|\nu|T+1)T\right\}. \qquad (20)$$

Аналогично, тому из (15) было получено (16), из (20) будем иметь

$$|u_n(x,t)|^2\le tw_n(\mathrm{t})\le \mathrm{T}\left[\|f_n\|^2_{C(\bar D_\tau)}mesD_T+\frac{|\beta\nu|T}{\beta+2}\right]\exp\left\{(2B(T^2+2)+|\nu|T+1)T\right\}=$$
$$=T^2\left[\frac{T}{2}\|f_n\|^2_{C(\bar D_\tau)}+\frac{|\beta\nu|}{\beta+2}\right]\exp\left\{(2B(T^2+2)+|\nu|T+1)T\right\}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|u_n\|_{C(D_T)}\le T\left[\sqrt{\frac{T}{2}}\|f_n\|_{C(D_T)}+\sqrt{\frac{|\beta\nu|}{\beta+2}}\right]\exp\left[\frac{T}{2}\left(2B\left(T^2+2\right)+|\nu|T+1\right)\right],$$

откуда в силу (4) в результате предельного перехода при $n\to\infty$ получим оценку

$$\|u\|_{C(\bar D_T)}\le T\sqrt{\frac{T}{2}}\|f_n\|_{C(\bar D_T)}\exp\left[\frac{T}{2}\left(2B\left(T^2+2\right)+|\nu|T+1\right)\right]+$$
$$+T\sqrt{\frac{|\beta\nu|}{\beta+2}}\exp\left[\frac{T}{2}\left(2B\left(T^2+2\right)+|\nu|T+1\right)\right] \qquad (21)$$

Этим оценка (3) доказана полностью.

Замечание 2. Из (17) и (21) следует, что в оценке (3) постоянные c_1 и c_2 следующие:

$$c_1=\sqrt{2^{-1}}T^2\exp\left(BT\left(T^2+2\right)+1/2\right),\ c_2=0, \qquad (22)$$

при $\beta>0$ и $\nu>0$;

$$c_1=T\sqrt{\frac{T}{2}}\exp\left[\frac{T}{2}\left(2B\left(T^2+2\right)+|\nu|T+1\right)\right],$$

$$c_2 = T\sqrt{\frac{|\beta\nu|}{\beta+2}}\exp\left[\frac{T}{2}\left(2B\left(T^2+2\right)+|\nu|T+1\right)\right], \tag{23}$$

при $-1<\beta<0$ и $-\infty<\nu<\infty$.

3 Эквивалентная редукция задачи (1), (2) к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Пусть $P:=P(x,t)$-произвольная точка области D_T. Обозначим через $D_{x,t}$ четырехугольник с вершинами в точках $O:=O(0,0)$, $P:=P(x,t)$, а также в точках P_1 и P_3, лежащих соответственно на носителях данных $\Gamma_{2,T}$ и $\Gamma_{1,T}$, т.е. $P_1:=P_1(0,t-x)$, $P_3:=P_3((x+t)/2,(x+t)/2)$. Очевидно, что область $D_{x,t}$ состоит из характеристического прямоугольника $D_{1;x,t}:=PP_1P_2P_3$ и треугольника $D_{2;x,t}:=OP_1P_2$, где $P_2:=P_2\left((t-x)/2,(t-x)/2\right)$.

Рассмотрим условия гладкости, наложенные на коэффициенты уравнения (1):

$$b_k \in C^{m+1}\left(\bar{D}_\infty\right), k=1,2. \quad b_3, b \in C^{m+1}\left(\bar{D}_\infty\right), \quad m\geq 1 \tag{24}$$

Замечание 3. Известно, что при выполнении этих условий гладкости для коэффициентов для задачи (1), (2) при $\nu=0$, $b=0$ корректно определена функция Грина-Адамара $G(x,t;x',t')$, которая вместе со своими частными производными до второго порядка включительно ограничена и кусочно-непрерывна, имея разрывы первого рода лишь при переходе через особое многообразие $t'+x'-t+x=0$ (см., например, [28], [29; с.230], [30; с.38]).

Далее считаем, что в условие (25) показатель гладкости $m=1$.

Для классического решения задачи (1), (2) u из класса $C^2(D_T)$ справедливо следующее интегральное равенство:

$$u(x,t)+\int_{D_{x,t}} G(x',t';x,t)\int_0^{t'} b(x',s)u(x',s)\,ds\,dx'dt' +$$

$$+\nu\int_{D_{x,t}} G(x',t';x,t)|u|^\beta u\,dx'dt' = \int_{D_{x,t}} G(x',t';x,t)f(x',t')\,dx'dt', \quad (x,t)\in\bar{D}_T \tag{25}$$

Замечание 4. Равенство (25) можно рассматривать, как нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра, которое можно переписать в виде

$$u(x,t)+\nu\left(L_0^{-1}|u|^\beta u\right)(x,t)+\left(M_0u\right)(x,t)=F(x,t), \qquad (x,t)\in\bar{D}_T \tag{26}$$

Здесь L_0^{-1}, M_0- линейные операторы, действующие по формулам

$$\left(L_0^{-1}v\right)(x,t):=\int_{D_{x,t}} G(x',t';x,t)v\,dx'dt',, \qquad (x,t)\in\bar{D}_T, \tag{27}$$

$$(M_0 v)(x,t) := \left(L_0^{-1} \int_0^t b(x,s) v(x,s)\, ds \right), \qquad (x,t) \in \bar{D}_T, \qquad (28)$$

$$F(x,t) = \left(L_0^{-1} f \right)(x,t), \qquad (x,t) \in \bar{D}_T. \qquad (29)$$

Лемма 2. Функция $u \in C\left(\bar{D}_T\right)$ является сильным обобщенным решением задачи (1), (2) класса С в области D_T тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения (26).

Доказательство. Действительно, пусть $u \in C\left(\bar{D}_T\right)$ является решением уравнения (26). Поскольку $f \in C\left(\bar{D}_T\right)$, а пространство $C^2\left(\bar{D}_T\right)$ плотно в $C\left(\bar{D}_T\right)$ (см., например, [21; с. 37]), найдется такая последовательность функций $f_n \in C^2\left(\bar{D}_T\right)$, что $f_n \to f$ в пространстве $C\left(\bar{D}_T\right)$ при $n \to \infty$. Аналогично, поскольку $u \in C\left(\bar{D}_T\right)$, существует такая последовательность функций $w_n \in C^2\left(\bar{D}_T\right)$, что $w_n \to u$ в пространстве $C\left(\bar{D}_T\right)$ при $n \to \infty$.
Положим

$$u_n := -\nu\left(L_0^{-1} |w_n|^\beta w_n \right) - M_0 w_n + L_0^{-1} f_n, \; n = 1, 2, \ldots$$

Легко проверить, что $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2\left(\bar{D}_T, S_T\right)$, а поскольку L_0^{-1} является линейным непрерывным оператором, действующим в пространстве $C\left(\bar{D}_T\right)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{C(\bar{D}_T)} = 0,$$

$$u_n \to -\nu\left(L_0^{-1} |u|^\beta u \right) - M_0 u + L_0^{-1} f$$

в пространстве $C\left(\bar{D}_T\right)$ при $n \to \infty$. Но из равенства (25) следует, что

$$-\nu\left(L_0^{-1} |u|^\beta u \right) - M_0 u + L_0^{-1} f = u.$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0.$$

С другой стороны, $L_0 u_n = -\nu |w_n|^\beta w_n - \int_0^t b w_n ds + f_n$, откуда в силу того, что

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|w_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{C(\bar{D}_T)} = 0,$$

получаем

$$L_\nu u_n = L_0 u_n + \nu |u_n|^\beta u_n + \int_0^t b u_n ds = -\nu |w_n|^\beta w_n - \int_0^t b w_n ds + f_n + \nu |u_n|^\beta u_n + \int_0^t b u_n ds =$$

$$= -\nu\left[|w_n|^\beta w_n - |u|^\beta u \right] + \nu\left[|u_n|^\beta u_n - |u_n|^\beta u \right] - \int_0^t b(w_n - u) ds + \int_0^t b(u_n - u) ds + f_n \to f$$ в

пространстве $C\left(\bar{D}_T\right)$ при $n \to \infty$. Обратное очевидно.

Уравнение (26) перепишем в операторном виде

$$u = Au := M\left(u + f\right) \tag{30}$$

Здесь оператор $A: C\left(\bar{D}_T\right) \to C\left(\bar{D}_T\right)$ является непрерывным и компактным, так как нелинейный оператор $M: C\left(\bar{D}_T\right) \to C\left(\bar{D}_T\right)$, действующий по формуле

$$Mu := -\nu |u|^{\beta} u - \int_0^t buds + f,$$

при $\beta > -1$ является ограниченным и непрерывным, а линейный оператор $M: C\left(\bar{D}_T\right) \to C\left(\bar{D}_T\right)$ является компактным [8]. В то же время, согласно леммам 1 и 2, для любого параметра $s \in [0,1]$ и для любого решения $u \in C\left(\bar{D}_T\right)$ операторного уравнения

$$u = sAu$$

справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{C(\bar{D}_T)} \le C_1 \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + C_2$$

с положительными постоянными C_1, C_2 не зависящими от u, f и s s. Поэтому согласно теореме Лере-Шаудера (см., например, [30; с. 375]) уравнение (30) при условиях леммы 1 имеет хотя бы одно решение $u \in C\left(\bar{D}_T\right)$. Тем самым, в силу леммы 2 нами доказана следующая.

Теорема. Пусть $-1 < \beta < 0$, а в случае $\beta > 0$ параметр $\nu > 0$. Тогда задача (1), (2) глобально разрешима в классе непрерывных функций С в смысле определения 2, т.е. если $f \in C\left(D_\infty\right)$, то для любого $T > 0$ задача (1), (2) имеет сильное обобщенное решение класса непрерывных функций С в области D_T.

Список литературы

[1] Blokhin A.M., Dorovsky V.N., Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum, Nova Science Publishers, Inc, New York. 1995, 192 p.

[2] Imomnazarov Kh.Kh. Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media // Comp. Appl. Math. 2001. v.20. pp.20-34.

[3] Имомназаров Х.Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб.ЖИМ. 2001. т.IV, No.2(8). сс.154-165.

[4] Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Прямые и обратные динамические задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Вестник НУУЗ, серия механика математика. 2006. No.2. б.86-91.

[5] Imomnazarov Kh.Kh. and Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in porous media // Mathematical and Computer Modelling. 2007. V.45. No.3-4. pp.270-280.

[6] Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред, Изд-во НУУз им. Мирзо Улугбека, 2012, 212с.

[7] Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Рахмонов Т.Т., Янгибоев З.Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавказский математический журнал, 2013, т.15, No. 2, б. 46-58.
[8] Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С. О первой задаче Дарбу для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка // Математические заметки 2008, т. 84, No. 5, с. 693-712.
[9] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных, Наука, М., 1981
[10] John F. Blow-up of solutions of nonlinear wave equation in three space dimensions // Manuscripta Math., 1979, v.28, No.1-3, pp. 235-268.
[11] John F. Blow-up for quasi-linear wave equations in three space dimensions // Comm. Pure Appl. Math., 1981, v. 34, No. 1, pp. 29-51.
[12] John F., Klainerman S. Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions // Comm. Pure Appl. Math., 1984, v.37, No.4, pp. 443-455.
[13] Kato T. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations // Comm. Pure Appl. Math., 1980, v.33, No.4, pp. 501-505.
[14] Georgiev V., Lindblad H., Sogge C. Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations // Amer. J. Math., 1977, v. 119, No.6, pp. 1291-1319.
[15] Sideris T.S. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions // J. Differential Equations, 1984, v.52, No.3, pp.378-406.
[16] Hormander L. Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations, Math. Appl. (Berlin), 26, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
[17] Pohozaev S.I., Veron L. Blow-up results for nonlinear hyperbolic inequaties // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 2000, v.29, No.2, pp.393-420.
[18] Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН, 234, Наука, М., 2001.
[19] Todorova G., Vitillaro E. Blow-up for nonlinear dissipative wave equations in R^n // J. Math. Anal. Appl., 2005, v.303, No.1, pp.242-257.
[20] Гурса Э. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1: Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными, Гостехиздат, М.-Л., 1933.
[21] Моисеев Е.И. О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения, 1984, т.20, No.1, с.73-87.
[22] Моисеев Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром, Изд-во МГУ, М., 1988.
[23] Kharibegashvili S. Goursat and Darboux Type Problems for Linear Hyperbolic Partial Differential Equations and Systems // Mem. Differential Equations Math. Phys., 4, Georgian Acad. Sci., Tbilisi, 1995.
[24] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, Наука, М., 1973.
[25] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений, Мир, М., 1985.
[26] Лернер М.Е. О качественных свойствах функции Римана // Дифференц. уравнения, 27:12 (1991), 2106-2120
[27] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии, Высшая школа, М., 1995
[28] Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа, Наука, М., 1970
[29] Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях, Мир, М., 1971.
[30] Треногин В.А. Функциональный анализ, Наука, М., 1993